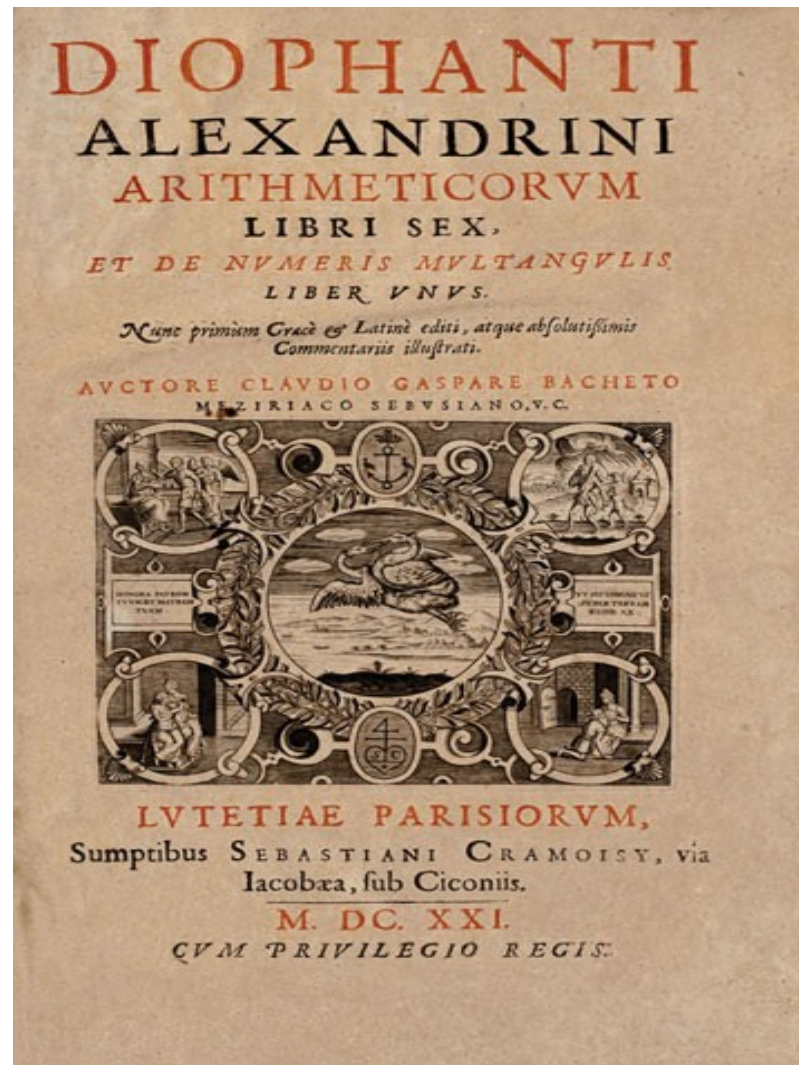


Диофантовы уравнения



Как решать с помощью программ?

Кто такой Диофант?

- **Диофант Александрийский** жил, предположительно в **III веке н. э.** и был последним великим математиком античности. До нас дошли два его сочинения — **«Арифметика»** (из тринадцати книг сохранилось шесть) и **«О многоугольных числах»** (в отрывках).
- Первый придумал, как можно записать уравнение с помощью математических знаков.
- Творчество **Диофанта** оказало большое влияние на развитие **алгебры**, **математического анализа** и **теории чисел**.



Диофантовы уравнения

С диофантовы уравнения знакомы многие!

Например, это задачи для учеников младших классов, которые решаются подбором.

«Сколькими различными способами можно расплатиться за мороженое ценой 96 рублей, если у вас есть только монеты по 1 рублю и по 5 рублей?»

Решение:

Пусть у нас X монет по 1 рублю и Y монет по 5 рублей.

Составим уравнение: $1 \cdot X + 5 \cdot Y = 96$

Это и есть диофантово уравнение.

X и Y — это целые числа

Пример программы

```
var x,y,k:integer;
begin
k:=0;
for x:=1 to 100 do
  for y:=1 to 20 do
    if x+5*y=96 then begin writeln(x, ' ', y);
      k:=k+1;end;
    writeln(k);
  end.
end.
```

Определение

- Если дать диофантовому уравнению общее **определение**, то можно сказать, что это **алгебраическое уравнение с дополнительным условием** — все его решения должны быть **целыми числами**.
- Уравнение вида **$ax+by=c$** , разрешимое в целых числах, называется линейным **диофантовым уравнением**.

Цель изучения **диофантовых уравнения** – дать основы теории целых чисел, которая дальше развивается как в **математике**, так и в **информатике и программировании**.

Задача про лапы

Условие: В клетке сидят куры и кролики. Всего у них 20 лап. Сколько там может быть кур, а сколько - кроликов?

Решение

Пусть у нас будет x кур и y кроликов.

Составим уравнение: $2x+4y=20$.

Сократим обе части уравнения на два: $x+2y=10$.

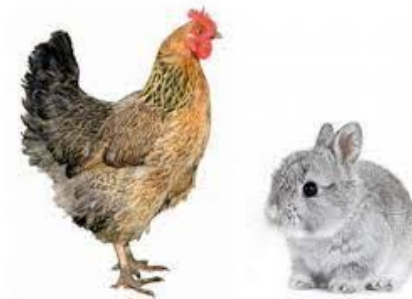
Следовательно, $x=10-2y$, где x и y - это целые положительные числа.

Можно решать подбором, но подбирать удобно с помощью программы.

Ответ (с помощью программы!):

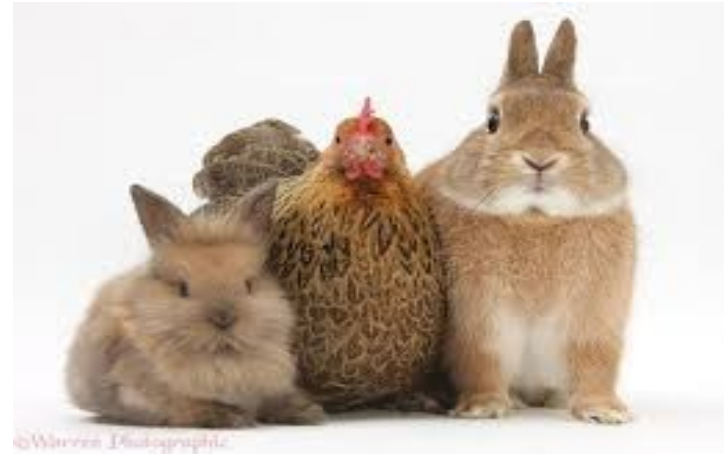
Число кур и кроликов: $(1; 8)$, $(2; 6)$, $(3; 4)$, $(4; 2)$, $(5; 0)$

Согласитесь, получилось быстрее, чем перебирать «пусть в клетке сидит один кролик...»

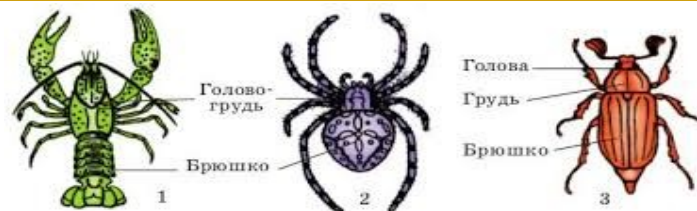


Программа

```
var x,y,k:integer;  
begin  
k:=0;  
for x:=1 to 10 do  
  for y:=1 to 10 do  
    if  $x+2*y=10$  then begin  
      writeln(x, ' ', y);  
      k:=k+1;end;  
  writeln(k);  
end.
```



Жуки и пауки



Энакин собрал в коробку жуков и пауков — **всего 8 штук**. Если всего в коробке **54 ноги**, сколько там пауков, если у жука **6 ног**, а у паука — **8 ног**?

Решение:

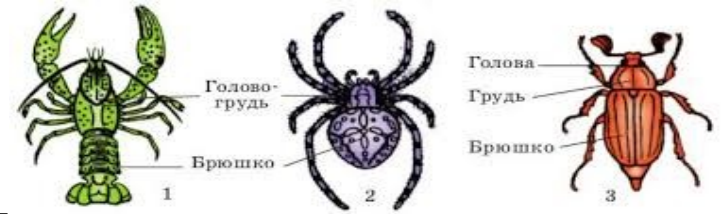
Зная это, предположим, что в коробке были одни только жуки, числом 8 штук. Тогда всех ног было бы **$6 \times 8 = 48$** , на 6 меньше, чем указано в задаче. Заменяем теперь одного жука пауком. От этого число ног увеличится на 2, потому что у паука не 6 ног, а 8.

Ясно, что если мы сделаем три такие замены, мы доведем общее число ног в коробке до требуемых 54. Но тогда из 8 жуков останется только 5, остальные будут пауки.

Итак, в коробке было **5 жуков** и **3 паука**.

Проверим: у 5 жуков 30 ног, у 3 пауков 24 ноги, а всего $30 + 24 = 54$, как и требует условие задачи.

Решение задачи «Жуки и пауки»



Можно составить уравнение:

- Пусть X — число жуков, а Y — число пауков.
- Так как у жуков 6 ног, а у пауков — 8, а всего 54 ноги, получим уравнение:

$$6X + 8Y = 54$$

Это уравнение можно решить подбором, то есть написать программу с использованием циклов.

Программа «Жуки и пауки»

```
var x,y,k:integer;  
begin  
k:=0;  
for x:=1 to 7 do  
  for y:=1 to 7 do  
    if (6*x+8*y=54) and (x+y=8) then  
      begin writeln(x, ' ', y);  
        k:=k+1;end;  
      writeln(k);  
    end;  
  end;  
end.
```



© Fotostock.com



Жук

Овцы и курицы



На одном из пастбищ Татуина пасутся овцы и курицы. У овец и куриц вместе **36 голов** и **100 ног**. Сколько овец и сколько куриц?

Решение:

- Пусть **X** — число овец, а **Y** — число куриц.

Всего овец и куриц 36, значит:

$$X + Y = 36$$

Ног у них 100, значит:

$$4 * X + 2 * Y = 100$$

Далее — составляем программу для решения подбором



Сороконожки и драконы



Летела стая **одноголовых** сороконожек и **трехголовых** драконов. Вместе у них **648** ног и **39** голов. Сколько ног у дракона?

Решение:

Пусть X — число драконов, а Y — число сороконожек. Так как всего голов 39, составим уравнение:

$$3 \cdot X + Y = 39$$

Пусть C — число ног у дракона, получим уравнение:

$$X \cdot C + Y \cdot 40 = 648$$



Программа

«Сороконожки и драконы»

```
var x,y,k,c:integer;
```

```
begin
```

```
k:=0;
```

```
for x:=1 to 13 do
```

```
    for y:=1 to 39 do
```

```
        for c:=1 to 648 do
```

```
            if (3*x+y=39) and (x*c+y*40=648) then begin
```

```
                writeln(x, ' ', y);
```

```
                k:=k+1; writeln(c); end;
```

```
            writeln(k);
```

```
end.
```

Задача про монетки

Условия

У одной продавщицы были только пяти- и двухрублевые монетки. Сколькими способами она может набрать 57 рублей сдачи?

Решение

Пусть у нас будет x двухрублевых и y пятирублевых монеток. Составим уравнение: $2x+5y=57$. Преобразуем уравнение: $2(x+2y)+y=57$. Пусть $z=x+2y$. Тогда $2z+y=57$. Следовательно, $y=57-2z$, $x=z-2y=z-2(57-2z) \Rightarrow x=5z-114$. Обратите внимание, переменная z не может быть меньше 23 (иначе x , число двухрублевых монеток, будет отрицательным) и больше 28 (иначе y , число пятирублевых монеток, будет отрицательным). Все значения от 23 до 28 нам подходят.

Ответ

Шестью способами.

Решение

```
var x,y,k:integer;
begin
k:=0;
for x:=1 to 28 do
  for y:=1 to 11 do
    if 2*x+5*y=57 then begin writeln(x, ' ', y);
      k:=k+1;end;
    writeln(k);
  end.
end.
```

Дополнительные задачи

Задача 1. Некий чиновник купил ослов и быков за 1770 талеров. За каждого осла он уплатил по 31 талеру, а за каждого быка – по 21 талеру. Сколько ослов и быков купил чиновник?

Задача 2. Вы должны уплатить за купленный в магазине свитер 19 руб. У вас одни лишь **трехрублевки**, у кассира - только **пятирублёвки**. **Всего у вас 15 трехрублевок**. Можете ли вы при наличии таких денег расплатиться с кассиром и как именно?

Решите эти задачи самостоятельно!